Niveau(x) d'enseignement : 3 Numéro EDUQ : 8970893
Centre d'intérêt : 841

Mathématique : fascicule B : les concepts unificateurs / [Direction générale du développement pédagogique, Direction des programmes, Service du primaire]. -- [Québec] : Ministère de l'éducation, 1981.
45 p. : ill. ; 28 cm. -- (Guide pédagogique / Direction générale du développement pédagogique du Québec. Primaire)

Code : 16-2300-02 ; 8182-520.

ISBN 2-550-04638-2

Vedette(s)-secondaire(s) : Québec (Province). Direction générale du développement pédagogique. Service du primaire

---

Descripteur(s) : Mathématiques • Activité d'apprentissage • Guide pédagogique • Primaire (Ordre d'enseignement)

Identificateur(s) de sujet : Concept unificateur (Mathématiques)

Ce document porte sur l'utilisation des concepts unificateurs dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Il met l'accent sur le fait que les concepts ne doivent pas faire l'objet d'apprentissages formels, mais peuvent servir de concept-outils pour l'apprentissage des diverses notions au programme. Des exemples et des suggestions d'activités d'apprentissage sont présentés à l'intérieur des six chapitres : la classification; les relations; les fonctions et les opérateurs; les opérations sur les ensembles; l'étude de structures; les concepts unificateurs et les programmes de l'enseignement primaire.

Type de document : d
Notice(s) connexe(s) : 8970458, 8870772, 8970094, 8970093

8970893

MATHÉMATIQUE

FASCICULE B

LES CONCEPTS UNIFICATEURS

© Gouvernement du Québec
Ministère de l'Éducation, 1981

ISBN 2 – 550 – 04638 – 2

Dépôt légal – quatrième trimestre 1981
Bibliothèque nationale du Québec

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 3

CHAPITRE 1 LA CLASSIFICATION 5

1.1 Classifier, c'est quoi? 5

1.2 Ensembles et classification 6
1.2.1 Rappel sur la notion d'ensemble 7
1.2.1.1 Description d'un ensemble 7
1.2.1.2 Inclusion et sous-ensembles 7

1.2.2 Représentations graphiques d'un ensemble 8
1.2.2.1 Diagramme «à branches» (arbre) 8
1.2.2.2 Diagramme de Carroll 10
1.2.2.3 Diagramme de Venn-Euler 12
1.2.2.4 Pour une même situation: trois représentations possibles 13

CHAPITRE 2 LES RELATIONS 15

2.1 Relations et ensembles 15

2.2 Classifications, sériations et relations 15
2.2.1 Classifications et relations 15
2.2.2 Sériations et relations 16

2.3 Représentations graphiques 17
2.3.1 Diagramme sagittal 18
2.3.2 Diagramme cartésien 19

2.4 Produit cartésien 21

CHAPITRE 3 LES FONCTIONS ET LES OPÉRATEURS 25

3.1 Fonctions et relations 25

3.2 Opérateurs et machines à fonction 25

3.3 Chaine d'opérateurs ou composition de fonctions 26
3.3.1 Inversion de l'ordre des opérateurs 27
3.3.2 Chaine d'opérateurs remplacée par un opérateur unique 28

3.4 Transformations et invariants 29
3.4.1 Transformations géométriques 29
3.4.2 Transformations arithmétiques et propriétés des opérations 29
3.4.3 Permutations 29

CHAPITRE 4 LES OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES 33

4.1 Réunion d'ensembles 34

4.2 Intersection d'ensembles 35

4.3 Complément d'un ensemble 36

CHAPITRE 5 L'ÉTUDE DE STRUCTURES 39

5.1 Remarques préliminaires 39

5.2 Domaine du non numérique 39
5.2.1 «Régularités» 39
5.2.2 Structures simples 39

5.3 Domaine du numérique 40
5.3.1 «Régularités» 40
5.3.2 Structures simples 40

CHAPITRE 6 LES CONCEPTS UNIFICATEURS ET LES PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE 43

6.1 Concepts unificateurs et mathématique 43

6.2 Concepts unificateurs et apprentissage des autres disciplines 43

CONCLUSION 45

PRÉSENTATION

On s'interroge de plus en plus sur la valeur relative que pourrait avoir l'utilisation des concepts unificateurs dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Déjà, plusieurs études ont été faites à ce sujet et de nombreuses expériences ont été menées avec des résultats variables et souvent contradictoires.

Le présent fascicule n'a pas la prétention d'apporter une réponse à ces interrogations. Toutefois, il met un accent particulier sur le fait que les concepts unificateurs ne doivent pas faire l'objet d'apprentissages formels, mais peuvent servir de concepts-outils pour l'apprentissage des diverses notions au programme. On pourra considérer les suggestions faites dans ce fascicule à la lumière de cette idée directrice.

Un effort a été fait également dans le sens d'une certaine simplification qui attache une importance marquée aux classifications, aux sériations et à l'établissement de relations. C'est que, dans ce contexte, les démarches proposées se rapprochent de celles que suit toute personne dans ses divers apprentissages.

C'est sans doute dans cette optique qu'il faudrait situer le chapitre 6 sur le rôle des concepts unificateurs en tant qu'instruments d'intégration de l'apprentissage. De même que d'une matière à l'autre, au primaire, on fait de l'exploration (espace, temps, volume, masse, forme, couleur et son ...), de même dans un besoin de classification, de sériation et d'établissement de relations, pourrait-on utiliser les mêmes outils (les concepts unificateurs) chaque fois qu'il est question de structures dans l'apprentissage.

INTRODUCTION

Au Québec, l'introduction des ensembles dans l'enseignement de la mathématique au primaire remonte déjà à une quinzaine d'années. Certains ont pu se demander pourquoi on avait introduit ces notions dans un programme destiné à de jeunes élèves. C'est que le modèle ensembliste, à la suite de nombreux travaux de psychologues, semblait convenir merveilleusement aux activités d'apprentissage de l'enfant dans l'évolution de sa pensée logique.

Qu'il s'agisse, en effet, d'activités de classification, de sériation ou d'établissement de relations, ce même modèle, grâce à son caractère structurant, fournit à l'enfant des outils précieux dans l'apprentissage et le développement de ses connaissances en général et de la mathématique en particulier.

Comme l'utilisation de ce modèle ensembliste peut trouver des applications nombreuses et répétées dans tous les apprentissages mathématiques — et même dans d'autres disciplines — on en est venu rapidement à parler de *concepts unificateurs* pour décrire ce modèle. Dans ce contexte, l'utilisation de divers types de diagrammes sert très bien les applications qu'on en fait ou qu'on veut en faire en les articulant autour de deux thèmes principaux :

— activités de classification,
— établissement de relations.

Une prise de conscience des éléments contenus dans ce fascicule devra donc s'accompagner d'une réflexion sérieuse sur le choix des approches à privilégier dans l'apprentissage de la mathématique.

L'acquisition réelle d'un concept n'a de solidité et de stabilité que si l'enfant participe à son élaboration. Les activités de manipulation et de représentation, à partir de situations variées et en relation avec la vie, motivent et soutiennent le lent processus de formation de ces concepts.

Une utilisation adéquate de ces outils de la pensée que sont les concepts unificateurs favorise le développement du raisonnement logique chez l'enfant et, face à un problème quelconque, l'aide à mener de pair et réflexion et l'action.

La pédagogie actuelle a choisi d'exploiter les ressources offertes par l'utilisation des concepts unificateurs. Non seulement en mathématique, mais dans toutes les disciplines, l'utilisation de ces moyens d'expression permet une bonne organisation de la pensée et contribue ainsi à améliorer la qualité du travail de réflexion de l'enfant. Il est important de développer ces ressources dès le début du primaire si l'on veut que les concepts unificateurs soient vraiment des outils de la pensée et des moyens d'expression familiers à l'enfant.

Avec la découverte des notions mathématiques, l'enfant a progressivement accès à un langage par lequel s'exprime la pensée mathématique. Ce langage ne comprend pas seulement des mots, mais aussi des symboles, des schémas, des diagrammes, des tableaux, etc. L'acquisition d'un symbolisme ou d'un code de langage mathématique ne doit pas être considérée ici comme un objectif aussi important que la compréhension de ces mêmes symboles ou de ce même langage. Le signifié, même s'il est difficile à détacher du signifiant, est beaucoup plus important que ce dernier.

Dans les premières années du primaire, les représentations graphiques d'une notion ou d'un concept mathématique sont beaucoup plus accessibles à l'enfant que leur expression verbale ou symbolique. L'enseignant doit tenir compte de ce fait dans l'établissement de ses stratégies d'enseignement.

Au second cycle, ce besoin de représentation concrète, pour moins impératif qu'il soit, garde quand même son importance tout en autorisant beaucoup plus facilement une introduction graduelle et restreinte d'un certain symbolisme et d'une certaine terminologie.

L'acquisition, avant la fin du primaire, de quelques éléments universels de langage ensembliste pourra se faire spontanément et sans problème à la condition qu'on s'applique à respecter le rythme d'apprentissage des écoliers.

Chapitre I

La classification

Dans un souci de simplification, on pourrait ramener les activités auxquelles l'enfant se livre habituellement dans sa démarche d'apprentissage à deux types principaux :

— exercices de classification,
— établissement de relations.

Ces deux types d'activités ne sont d'ailleurs pas toujours facilement dissociables. Les exercices de classification, par exemple, supposent plus ou moins implicitement l'établissement de relations d'appartenance, d'inclusion ou d'équivalence.

Quant aux activités de sériation d'opérations et de fonctions, il semble évident qu'on doive les ranger dans la seconde catégorie d'activités, l'établissement de relations. Toutefois, là aussi, on ne peut prétendre exclure toute démarche de classification.

1.1 Classifier, c'est quoi ?

classifier, pourrait-on dire, c'est distinguer

— entre les éléments qui appartiennent à un ensemble et ceux qui n'en font pas partie (certains diront qu'il s'agit plutôt de *classement* que de *classification* ...),

— entre les ensembles qui sont compris dans un ensemble donné et ceux qui en sont exclus.

Ainsi, le mot «chien» est un nom commun, mais le mot «joli» n'en est pas un. Le nombre 12 est un nombre pair, mais le nombre 7 n'en est pas un.

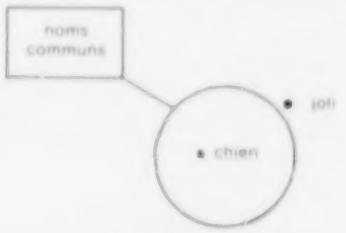


fig. 1.1

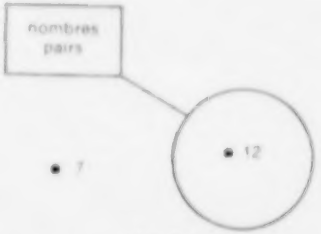


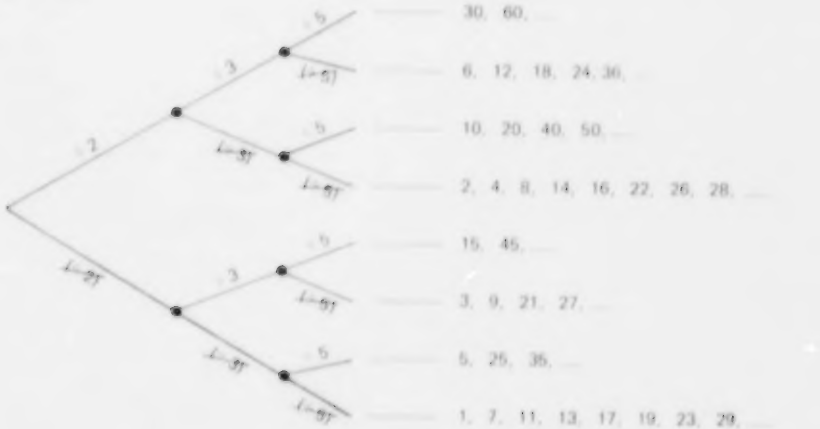
fig. 1.2

De même peut-on dire que l'ensemble des noms communs est inclus dans celui des noms et que ce dernier ensemble est lui-même inclus dans celui des mots.

fig. 1.3

Dans tout exercice de classification, on ne peut donc manquer de recourir à l'établissement plus ou moins implicite de relations d'*appartenance* ou d'*inclusion*. Ces deux types d'activités, comme on l'a dit plus haut, sont intimement reliés.

Autre exemple



divisibilité des cent premiers nombres par 2, 3 et 5

fig. 1.4

Il s'agit ici, de toute évidence, d'une classification à plusieurs paliers:

1° palier: (÷2);
2° palier: (÷3);
3° palier: (÷5).

Cependant, à chacun des paliers, on doit se demander si tel élément appartient ou non à un ensemble donné.

Classifier, c'est donc établir des relations d'appartenance ou de non-appartenance entre un élément et un ensemble ou encore établir des relations d'inclusion ou de non-inclusion entre deux ensembles donnés. C'est encore établir des relations d'équivalence entre des éléments appartenant à un même sous-ensemble.

1.2 Ensembles et classification

L'importance des activités de classification pour l'enfant ne fait pas de doute. Lorsqu'il arrive à l'âge scolaire, ce dernier possède déjà une certaine pensée logique qui ne demande qu'à se développer. La tâche de l'enseignant du primaire est donc d'utiliser les connaissances déjà acquises par l'enfant, de l'aider à les structurer en lui permettant d'arriver à la mathématisation des situations vécues antérieurement et de l'amener à la découverte de notions nouvelles.

C'est donc par des activités de classification que l'enfant en arrive à reconnaître les caractéristiques particulières d'un objet. Tout intuitives qu'elles soient, ces classifications lui permettent tout de même de développer encore davantage les attitudes de pensée logique qu'il a acquises auparavant.

L'enfant évolue dans un univers d'objets qu'il cherche constamment à identifier et à classifier. Au début, ses classifications sont libres, c'est-à-dire qu'il en fixe lui-même le ou les critères. Puis, il en vient à opérer des classifications à partir des critères qui lui sont imposés.

Exemples:

— Placer dans une boîte toutes les feuilles d'arbre de la même espèce.

— Regrouper des objets qui ont une caractéristique commune: par exemple, les solides qui roulent.

— Regrouper les objets qui ne possèdent pas un certain critère: par exemple, les objets qui n'ont pas la forme d'un cube.

— Présenter divers objets à l'enfant et lui demander de trouver une caractéristique commune à tous ces objets.

— Trouver ce que deux ou plusieurs objets ont de semblable (critère commun) ou de différent (critère particulier à chaque objet).

— Associer par paires, selon le critère qui convient le mieux, un certain nombre d'objets.

— Reconnaître la façon avec laquelle des objets ont été associés par paires.

— Etc.

De toutes ces situations de classification, peu à peu se dégageront les notions d'ensemble, d'élément, de relation, de fonction et d'opération.

1.2.1 Rappel sur la notion d'ensemble

Un ensemble, c'est une collection d'objets (le mot objet pris dans un sens très large) dont les critères de regroupement sont régis par les règles suivantes:

a) Tous les éléments doivent avoir entre eux un point commun (appelé propriété ou attribut de l'ensemble) qui permet de décrire l'ensemble.

Remarque: Un ensemble n'est pas obligatoirement formé d'éléments semblables. Il peut être constitué d'éléments divers ayant comme propriété commune *la propre décision de l'enfant* de les mettre ensemble. Un ensemble peut n'exister que par la volonté de son créateur ou de celui qui l'observe.

b) Tous les éléments de l'ensemble doivent être parfaitement distincts les uns des autres.

c) Un ensemble est déterminé lorsqu'on connaît ses éléments, c'est-à-dire sa composition.

1.2.1.1 Description d'un ensemble

Décrire un ensemble, c'est utiliser un langage précis permettant d'identifier cet ensemble sans possibilité d'induire une quelconque confusion. On peut décrire un ensemble en *compréhension* ou en *extension*. On peut utiliser les deux façons à condition d'éviter de tomber dans le formalisme.*

— Décrire un ensemble *en compréhension*, c'est énoncer la ou les propriétés qui caractérisent les éléments de cet ensemble dans un univers donné.

Exemples:

1. les jours de la semaine ;
2. les provinces de l'ouest du Canada ;
3. les nombres pairs ;

— Décrire un ensemble *en extension* consiste à faire l'inventaire des éléments de cet ensemble et à les énumérer sans égard pour l'ordre dans lequel cette énumération se fait.

Exemples:

1. {lundi, dimanche, vendredi, mardi, jeudi};
2. {Manitoba, Saskatchewan, Alberta, Colombie britannique};
3. {0, 2, 4, 6, 8, ...}

Enfin, on devrait se garder d'insister sur la notion d'ensemble vide et encore plus sur les notions de singletons et de paires. La notion d'ensemble vide (ensemble qui ne contient pas d'éléments) ne peut naître — et difficilement — chez l'enfant qu'en référence à un ensemble pré-existant ou un ensemble hypothétique qui renfermerait ou pourrait renfermer des éléments. Une certaine prudence s'impose donc ici quand on veut tenter d'aborder ces notions avec les écoliers.

1.2.1.2 Inclusion et sous-ensembles

Il en a été rapidement question en 1.1, page 4. À l'intérieur d'un ensemble, un enfant peut facilement former d'autres ensembles. Chacun des ensembles ainsi formé possède l'attribut de l'ensemble référentiel ou ensemble universel ou un attribut supplémentaire. Ces ensembles deviennent donc des sous-ensembles de l'ensemble universel et les éléments de ces sous-ensembles se trouvent ainsi à appartenir à cet univers.

* L'utilisation des termes *compréhension* et *extension* n'est vraiment pas nécessaire.

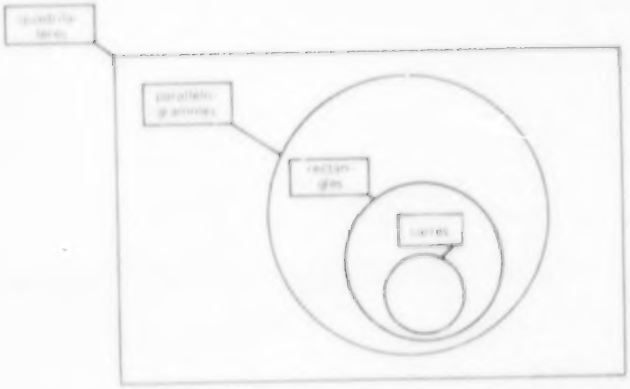


fig. 1.5

Ainsi, dans la figure 1.5, l'ensemble des parallélogrammes constitue un sous-ensemble de l'ensemble des quadrilatères, puisqu'en plus d'avoir quatre côtés, les parrallélogrammes ont leurs côtés opposés parallèles.

Au primaire, la recherche de tous les sous-ensembles possibles d'un ensemble donné est une exploration intéressante à faire. L'enfant peut y arriver par le jeu, le dessin, l'utilisation d'un diagramme «en arbre», etc. Le jeu lui permet de vivre une situation qu'il devra schématiser par la suite.

Par cette recherche, l'écolier constate qu'un sous-ensemble ne peut exister sans un ensemble de départ et qu'un sous-ensemble peut fort bien ne posséder aucun élément (ensemble vide), tout comme il peut en posséder un seul ou plusieurs. L'enseignant peut en effet aborder la notion d'ensemble vide en faisant disparaître un à un les objets qui sont placés dans l'ensemble*.

La notion d'inclusion découle de la notion de sous-ensemble puisque tout sous-ensemble est formé d'éléments de l'ensemble universel (ou ensemble référentiel).

L'exploration judicieuse et l'acquisition de toutes ces notions peuvent contribuer au développement d'un esprit logique. En favorisant l'utilisation de termes justes, elles contribuent au développement du vocabulaire des jeunes élèves.

1.2.2 Représentations graphiques d'un ensemble

Le dessin est la forme de langage que privilégie l'enfant. Il convient d'exploiter ce mode d'expression lorsqu'il ressent le besoin d'illustrer les découvertes qu'il a faites à partir de ses jeux, libres ou structurés.

Il n'y a pas d'âge précis pour l'introduction des représentations graphiques. Il suffit que l'enseignant y pense et saisisse l'occasion favorable à leur utilisation.

La représentation graphique d'ensembles peut se faire à partir des types de diagrammes suivants:

- diagrammes «à branches» (arbre);
- diagrammes de Carroll;
- diagrammes de Venn-Euler.

1.2.2.1 Le diagramme «à branches» (arbre)

Des trois types de diagrammes mentionnés ci-dessus, le diagramme dit «à branches» est probablement le plus simple et le plus facile à utiliser dans les activités de classification. En effet, quel que soit le nombre de critères de classification envisagés, l'écolier n'a qu'une

* Voir 1.2.1.1

seule question à se poser à chaque palier de cette classification: l'objet à classifier a-t-il la propriété demandée à ce palier?

De plus, ce diagramme a l'avantage de favoriser une meilleure visualisation de l'appartenance d'un élément à un ensemble (ou de sa non-appartenance).

Exemple 1: voir fig. 1.4 p. 6.
Exemple 2: page suivante

Un enfant a plusieurs autos: des autos bleues, des autos rouges et des autos jaunes. Certaines de ces autos possèdent une roue de secours bien en évidence à l'arrière tandis que d'autres ont un toit ouvrant. Comment l'enfant peut-il en faire une classification?

Le diagramme qu'il utilisera à cette fin pourra prendre différents aspects selon les critères sur lequel il arrêtera son choix.

Critères de classification

En voici une illustration. L'ordre des critères choisis est le suivant: roue de secours — toit ouvrant — couleur.

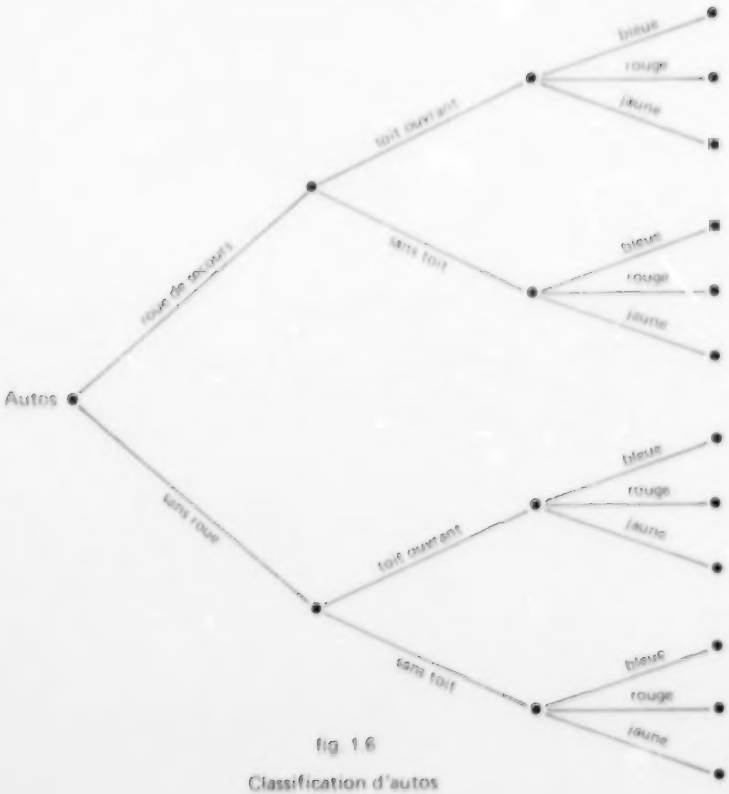


fig. 1.6

Classification d'autos

Qu'il s'agisse d'un arbre dichotomique (classification à deux branches comme les 1er et 2e paliers) ou non dichotomique (comme le 3e palier), ce type de diagramme est le plus facile à utiliser puisqu'il permet à l'enfant de n'utiliser qu'un seul niveau de décision à la fois. De plus, il lui donne beaucoup d'indications sur le ou les critères choisis pour la classification effectuée et rend possible un retour sur tout le cheminement fait pour obtenir cette classification.

1.2.2.2 Diagramme de Carroll

Le diagramme de Carroll, pour ce qui est de la difficulté de l'utilisation ou de l'interprétation constitue un moyen terme entre le diagramme «à branches» et le diagramme de Venn-Euler. Les branches du diagramme précédent deviennent ici des colonnes et des rangées.

Par exemple, si l'on doit classifier des objets rouges ou non et de forme carrée ou non, le

diagramme de Carroll pour représenter une classification de ces objets pourrait être le suivant:

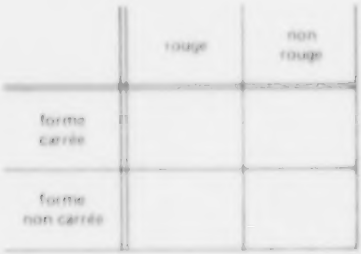
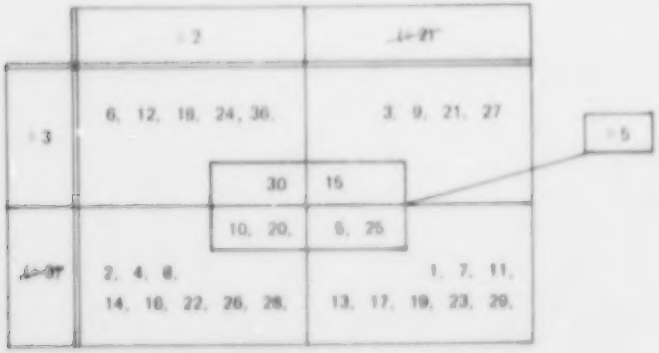


fig. 1.7

Dans le diagramme de Carroll, chaque plage ou région est *l'intersection* de l'ensemble représenté par la colonne et par la rangée auxquelles elle appartient.

La représentation d'un diagramme de Carroll à trois paliers de classification est un peu plus sophistiquée et moins utilisée. Il en existe d'ailleurs plusieurs versions ou modèles.

En voici un exemple:



Classification des 30 premiers nombres selon qu'ils sont divisibles par 2 (multiples de 2) par 3 (multiples de 3) ou par 5 (multiples de 5).

fig. 1.8

Il serait peu souhaitable d'abuser de ce diagramme quand il s'agit de classification à trois paliers.

1.2.2.3 Diagramme de Venn-Euler

Malgré son usage très répandu, le diagramme de Venn est peut-être, des trois types de diagrammes, le moins facile à utiliser ou à interpréter dans des activités de classification, du moins pour de jeunes écoliers.

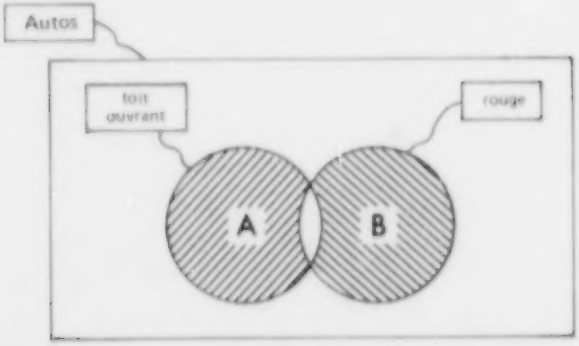


fig. 1.9

Ainsi dans le diagramme ci-dessus, il n'est pas facile, pour un jeune enfant de 6 ou 7 ans, d'identifier les caractéristiques des éléments devant figurer dans telle ou telle région ou de classifier des éléments dans les régions appropriées. En effet, chaque fois que l'enfant veut placer un objet dans une région donnée, ce dernier doit avoir simultanément à l'esprit les deux critères de classification désignés, et se demander si ces deux critères s'appliquent ou non à l'objet en question.

Cependant, ce diagramme a les avantages de ses inconvénients. Il est plus synthétique que le diagramme «à branches», en ce sens qu'il fournit des renseignements d'une façon plus immédiate concernant les caractéristiques que peuvent avoir ou ne pas avoir tel ou tel élément ou objet déjà classifié dans le tableau. Ainsi une auto rouge au toit non ouvrant se situe dans la région B, tandis qu'une auto jaune au toit ouvrant se situe dans la région A.

Les mêmes avantages et inconvénients sont encore plus évidents dans une classification à 3 paliers.

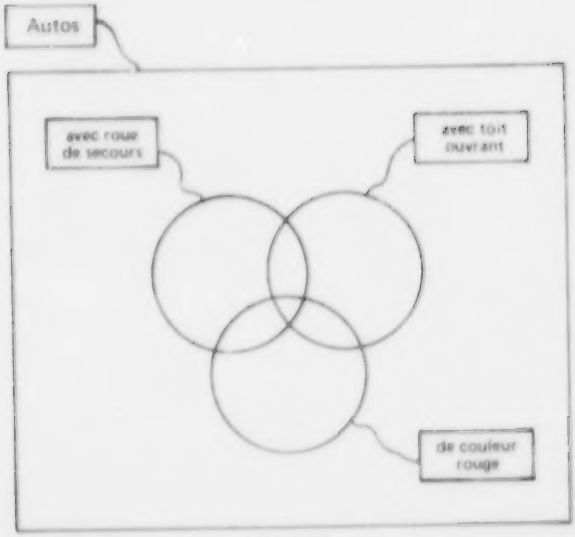


fig. 1.10

On se retrouve ici avec huit régions qui diffèrent toutes l'une de l'autre par leurs caractéristiques globales mais qui offrent un tableau complet de toutes les possibilités offertes dans une telle situation.

REMARQUE: Pour respecter l'orthodoxie du langage de Venn, chaque élément de l'ensemble devrait sans doute être représenté par un point et identifié par une minuscule. Avec de jeunes écoliers, cette préoccupation semble un peu superflue; aussi, des représentations ou collages à l'intérieur d'une région donnée suffisent-elles amplement.

1.2.2.4 Pour une même situation; trois représentations possibles

Il est évident que tous les types de diagrammes sont intéressants à utiliser pour analyser une situation. Il importe alors de constater que des diagrammes différents peuvent fort bien représenter une même situation.

Ainsi dans une classe de garçons et de filles, certains enfants ont des chapeaux rouges et les autres des chapeaux d'une autre couleur.

On peut alors se livrer à une activité de classification en utilisant l'un ou l'autre des diagrammes proposés.

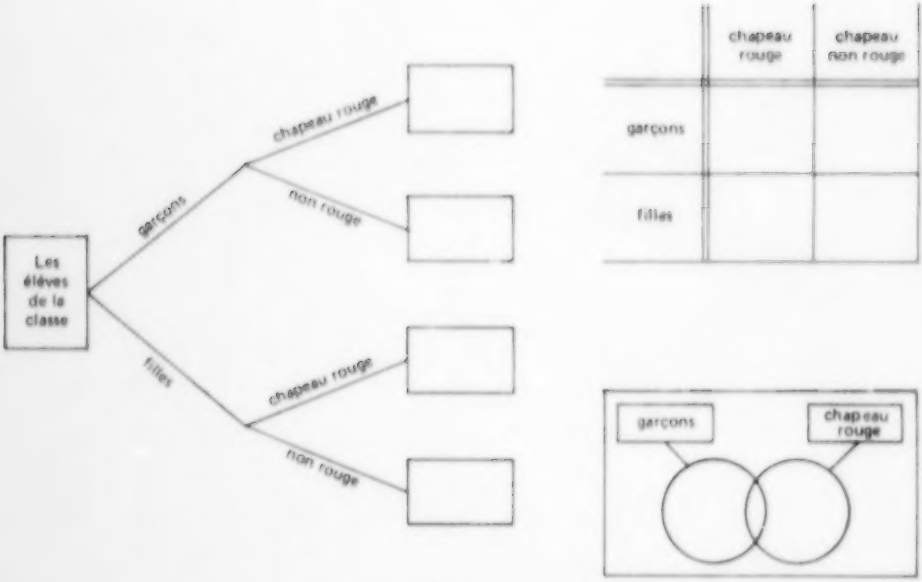


fig. 1.11

L'utilisation de plusieurs diagrammes à des fins de classification peut donner à l'élève une expérience plus riche et une exploration plus complète d'un même fait. Qu'il s'agisse d'exploiter un, deux ou trois critères de classification, l'utilisation simultanée des trois sortes de schémas pourrait lui fournir l'occasion de développer son esprit de synthèse.

Chapitre 2
Les relations

Le domaine des relations est le fondement de l'activité intellectuelle, de l'activité psychologique et de l'activité sociale de l'enfant.

Un des premiers actes «mathématiques» d'un enfant est la prise de conscience des relations qui existent entre les êtres qui lui sont familiers et les mots qui désignent ces mêmes êtres. Au début, ces relations se rattacheront au domaine physique (nourriture, habillement) et au domaine social (parenté, amis); son entrée dans le monde scolaire lui fournira de nombreuses occasions d'enrichir son expérience et lui permettra d'accéder de façon lente, mais soutenue, à un mode de pensée plus précis et plus structuré.

2.1 Relations et ensembles

Si l'exploration du monde des ensembles n'avait d'autre résultat que d'amener l'enfant à décrire des ensembles isolés par l'énumération des éléments qui entrent dans leur composition, on aurait peut-être développé le sens de l'observation chez l'enfant, mais on n'aurait pas gagné grand chose de plus.

L'approche ensembliste ne doit pas être purement statique. Elle doit être dynamique car elle doit amener l'écolier à établir ou à identifier des relations entre:

- les éléments d'un ensemble;
- des éléments et les ensembles auxquels ils appartiennent;
- plusieurs ensembles.

Quand l'enfant opère des classifications, il ne peut le faire sans déterminer si oui ou non tel élément appartient à un ensemble donné ou si oui ou non ce même élément possède la caractéristique de l'ensemble. Il établit donc entre cet élément et l'ensemble dont il est question, une relation d'appartenance: «*appartient à* ...». «Ce petit objet à quatre roues est une auto. Cet autre objet à quatre pattes est un animal, mais celui-ci est une table» ...

Cela lui permet d'établir, entre les éléments qui se retrouvent à l'intérieur d'un ensemble, une certaine relation d'équivalence où la nature, la forme, la couleur ou la grandeur servent de critères de regroupement sous une même étiquette. Ainsi, le simple fait de mettre ensemble des autos, de regrouper des animaux ou de rassembler des objets de forme sphérique constitue une indication assez nette que l'écolier a établi au moins implicitement des *relations d'équivalence* pour pouvoir réaliser ces activités.

Il semble assez évident ici que l'établissement de relations — surtout pour de jeunes écoliers — est beaucoup plus important que l'explicitation verbale de ces mêmes relations sous forme de:

- «appartient à ...»
- «est inclus dans ...»
- «est équipotent à ...»
- «est en correspondance biunivoque avec ...»
- etc.

Il ne s'agit pas de condamner de telles formulations, mais simplement de faire remarquer qu'il est facile parfois de tomber dans un formalisme aussi pédant qu'inutile, surtout si ce formalisme est utilisé trop tôt.

2.2 Classifications, sériations et relations

On ne saurait parler de relations sans parler de classifications et de sériations. Dans le monde où l'on vit, chaque objet possède un ensemble de caractéristiques qui le distinguent des autres objets et que l'enfant apprend à reconnaître. Il apprend ensuite le nom de chaque objet.

De même que l'enfant peut passer facilement des exercices de classification aux relations d'équivalence et de certaines relations d'équivalence à l'aspect cardinal du nombre, de même peut-il passer des exercices de sériation aux relations d'ordre, et des relations d'ordre à l'aspect ordinal du nombre. L'enseignant doit donc être conscient que les classifications et les sériations font partie de la mathématique et précèdent tout naturellement l'acquisition d'un concept quel qu'il soit.

2.2.1 Classification et relations

Avant de classifier des objets, l'enfant identifie une ou plusieurs propriétés d'un objet, puis décrit et reconnaît un objet à l'aide d'un ou de plusieurs attributs ou propriétés de cet objet.

Viennent ensuite les comparaisons d'objets entre eux pour déterminer la ou les propriétés communes à ces objets et, par là, opérer les premières classifications. Et lorsque l'écolier fait des classifications, il établit au moins implicitement des relations entre les éléments qu'il doit classifier.

Le regroupement d'objets (ou même d'ensembles) dans des ensembles distincts et déterminés ne peut se faire qu'à la condition d'établir des relations d'équivalence qui peuvent s'exprimer par exemple par des expressions comme :

- a la même forme que ;
- est de la même couleur que ;
- est de la même année que ;
- a le même nombre que ;
- vaut autant que.

2.2.2 Sériations et relations

Lorsque l'enfant veut placer des objets dans un certain ordre, il doit d'abord les comparer afin d'en bien saisir les similitudes et les différences. Dès que l'enfant compare des objets et les place en ordre, il établit une sériation selon un ou des critères qu'il se donne ou selon un ou des critères suggérés par l'adulte.

Au début, les sériations sont très intuitives et souvent l'enfant change de critère en cours de route. Puis, vient le moment où il peut ordonner plusieurs objets selon un même critère ou reconnaître le critère qui a déterminé la sériation.

Exemples :

- Ranger des objets par ordre croissant ou décroissant selon la grandeur, la forme, la couleur, la grosseur.
- Ranger ou ordonner des objets selon un critère d'alternance (ex. : dans la fabrication d'un collier, la couleur ou la forme varient selon un ordre établi à l'avance).
- Continuer une série d'objets ordonnés selon une certaine règle.
- Reconstituer une série d'objets ordonnés selon une certaine règle.
- Reconstituer une série complète d'objets à laquelle on a enlevé ou ajouté un certain nombre d'objets.
- Établir une correspondance terme à terme entre deux groupes d'objets.
- Exploiter des situations où une correspondance terme à terme est possible et d'autres où elle ne l'est pas.
- Placer en ordre des images pour que l'ordre ainsi établi corresponde à une histoire sensée.

Remarquer que des objets sont semblables ou différents et les mettre en ordre, sont deux choses distinctes. L'ordre peut être déterminé par le temps, par une distribution spatiale ou par n'importe quel autre critère que l'enfant ou l'adulte veulent bien utiliser.

Dans certains cas, le choix de l'ordre peut être arbitraire. Ainsi dans le montage d'un collier de perles, on peut laisser à l'enfant le choix de placer les perles dans un ordre établi par lui (par exemple : rouge, bleu, jaune, rouge, bleu, jaune).

Par contre, en plaçant certains faits par ordre chronologique, l'enfant obtient une suite d'événements qui ne peuvent être intervertis (par exemple : se réveiller, se lever, se laver et s'habiller).

Dans l'exploration de tout matériel, au moment de jeux libres, l'enfant identifie une ou plusieurs propriétés de plusieurs objets, puis il compare ces objets entre eux et les classe selon un ordre qu'il se donne. Pendant des jeux plus structurés, l'enfant classe les objets selon une ou des séquences que lui donne l'adulte. Dans une situation comme dans l'autre, l'écolier établit un ordre dans le rangement des objets mis à sa disposition et il obtient ainsi une sériation.

L'enfant peut aussi placer des objets de diverses grandeurs selon un ordre croissant ou selon un ordre décroissant. Chaque fois, l'ordre de rangement des objets est précis et ne peut être changé en cours de route.

Certains ordres sont conventionnels (par exemple : l'ordre alphabétique, l'ordre trèfle, carreau, coeur, pique du jeu de bridge).

Il y a toujours un ordre qui existe entre les éléments d'une sériation.

Exemples:

— Soit la relation « ... est à la droite de ... » pour l'ensemble des enfants placés dans l'ordre suivant:

— Soit la relation « ... obéit à ... » pour une équipe de hockey comprenant un entraîneur, un instructeur, un capitaine et des joueurs.

— Soit la relation « ... est plus petit que ... » pour l'ensemble des nombres 1, 2, 3, 4, 5

— Etc.

Toutes ces relations peuvent être exploitées avec les enfants. Il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails et de donner à chacune un nom précis. Elles doivent être présentées à l'enfant sous forme de situations à expérimenter, sans accorder plus d'importance qu'il n'en faut au vocabulaire et à la symbolisation.

Trouver dans une suite d'objets celui qui est placé le premier, le dernier, au milieu, entre deux objets précis, etc.

La lecture du chapitre 1 du fascicule C sur les nombres naturels renseignera l'enseignant du premier cycle sur l'importance des classifications et des sériations dans l'apprentissage du nombre.

L'enseignant doit avoir à l'esprit que les deux processus de classification et de sériation doivent avoir été largement explorés par l'écolier si l'on veut qu'il comprenne vite le sens du nombre. Les habiletés de classification et de sériation contribuent, d'une manière générale, au développement de la pensée logique chez l'enfant et, d'une façon plus particulière, à la formation des concepts de nombre cardinal et de nombre ordinal.

2.3 Représentations graphiques

Pour définir une relation, il faut un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée et une règle de correspondance qui associe à un élément de l'ensemble de départ un élément de l'ensemble d'arrivée. Cet énoncé souffre d'une certaine rigueur et gagnerait à être illustré par un exemple.

Exemple:
Ensemble de départ: $\{2, 3\}$
Ensemble d'arrivée: $\{2, 3, 8, 12, 15\}$
Règle de correspondance: « ... est diviseur de ... »

Il y a deux façons principales de représenter graphiquement une relation, c'est-à-dire qu'on peut utiliser deux types de diagrammes:

— le diagramme sagittal;
— le diagramme cartésien.

2.3.1 Diagramme sagittal

Voici comment on pourrait illustrer l'exemple donné ci-dessus, à l'aide d'un diagramme sagittal

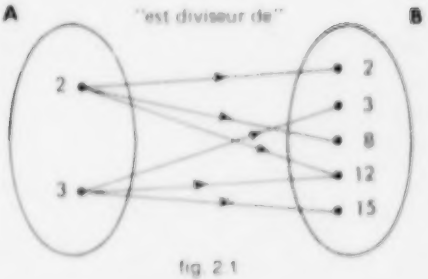


fig. 2.1

On voit ici que 2 est diviseur de 2, 8, 12 et que 3 est diviseur de 3, 12, 15. L'ensemble des couples ainsi obtenus correspond à l'ensemble des flèches du diagramme. On applique souvent l'appellation de GRAPHE à cet ensemble de couples. Ainsi, le graphe de la relation serait ici:

$$\{(2,2), (2,8), (2,12), (3,3), (3,12), (3,15)\}$$

L'utilisation des diagrammes sagittaux permet à l'écolier de reconnaître, à l'aide de flèches, les couples d'une relation et de distinguer — dans ces couples — l'élément de départ et l'élément d'arrivée: dans un couple, en effet, le premier terme est toujours élément de l'ensemble de départ et le second est toujours élément de l'ensemble d'arrivée.

Il peut arriver parfois que les ensembles de départ et d'arrivée soient les mêmes.

Soit la relation: «est le frère de» dans l'ensemble des enfants d'une même famille: Alain, Sylvie, Jules et Manon. On a alors:

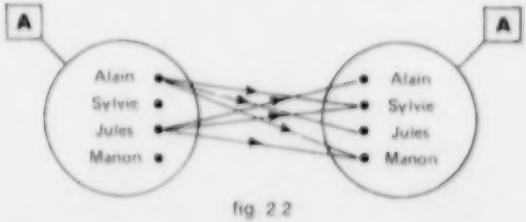


fig. 2.2

Puisque dans ce cas la relation est établie à l'intérieur d'un même ensemble, le diagramme sagittal peut alors prendre l'allure suivante:

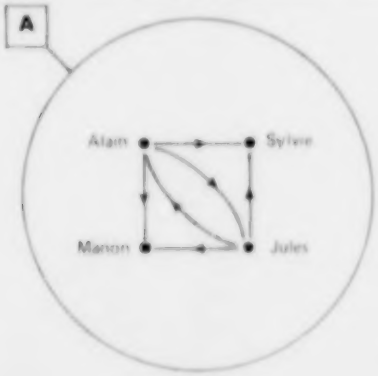


fig. 2.3

2.3.2 Diagramme cartésien

Ce dernier diagramme n'est pas aussi intuitif peut-être que le diagramme sagittal et présente plusieurs difficultés d'utilisation. Toutefois, les nombreux usages qu'on en fait, dans le domaine des statistiques en particulier, commandent l'emploi de ce procédé dans un grand nombre de situations.

Exemple 1:

TABLEAU DES ACTIVITÉS RÉALISÉES EN MATHÉMATIQUE

a terminé l'activité	1re	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e
Alain	X	X		X			X		
Manon	X			X	X				
Louise				X	X	X	X	X	
Éric	X	X		X			X	X	
Sylvie	X	X					X	X	
Luc	X	X		X	X	X			

fig. 2.4

Dans ce tableau, la relation pourrait se lire: «*a terminé l'activité* . . .», l'ensemble de départ serait constitué des enfants et l'ensemble d'arrivée, des activités à réaliser.

Le graphe de la relation comprendrait l'ensemble des couples

{(Alain, 1"), (Alain, 2"), (Alain, 4"), (Alain, 7"), (Manon, 1"), ...}

Exemple 2:

Si l'on se réfère au graphique sagittal de la page 18 (figure 2.1) la situation qui y est représentée pourrait tout aussi bien l'être à l'aide d'un graphique cartésien

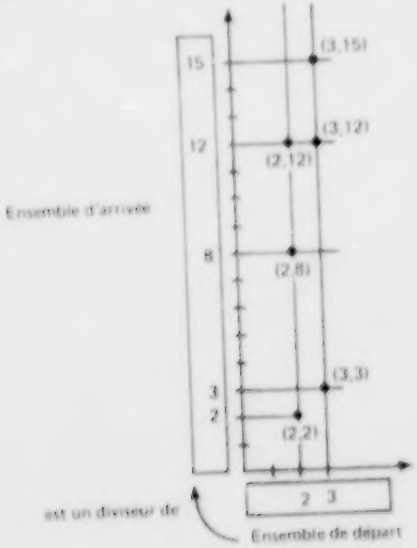
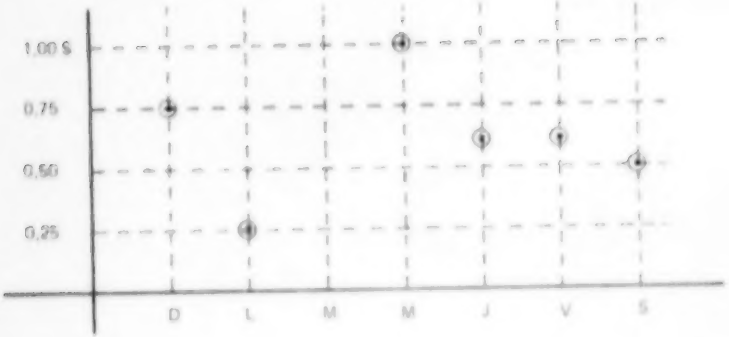


fig. 2.5

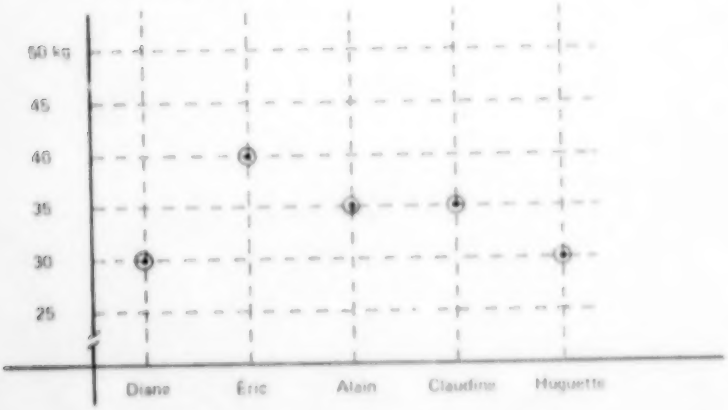
Cependant, il semble assez évident que cet exemple soit plus facile à construire ou à interpréter à l'aide du diagramme sagittal de la page 18.

Il n'en est pas toujours ainsi. Il suffit de considérer les exemples suivants où la lecture sur un diagramme cartésien est réellement très facile.

a) Argent gagné cette semaine



b) Quel est mon poids ?



2.4 Produit cartésien

Si l'on se reporte en 2.3.1, on constate que certains couples: (2,3), (2,15), (3,2), (3,8), sont exclus de la relation: «est un diviseur de». Dans une relation, en effet, on ne tient compte que des couples qui répondent aux critères définis par la règle de correspondance entre l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

Mais lorsque, pour un motif quelconque, on veut réunir tous les couples qu'il est possible de former avec les éléments des ensembles de départ et d'arrivée, on obtient ce qu'on appelle le produit cartésien de ces deux ensembles.

Exemple 1:

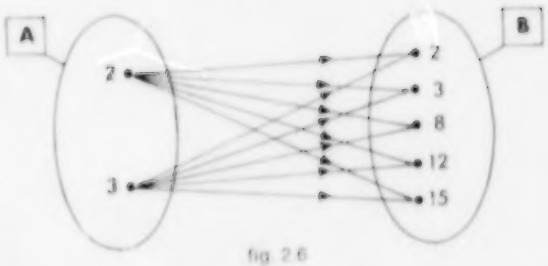


fig. 2.6

L'ensemble des flèches représentées ici correspond au produit cartésien de A et de B, c'est-à-dire l'ensemble de tous les couples que l'on peut former avec les ensembles A et B.

Exemple 2:
Quatre élèves s'inscrivent à la classe de musique de l'école. Au début, ils n'ont droit qu'à un seul instrument parmi les trois déjà utilisés dans cette classe, soit la flûte, la guitare et le piano. Chaque élève a la possibilité de choisir son instrument.

Soit A, l'ensemble des élèves
$\{$Michel, Claire, Josée, Paul$\}$
B, l'ensemble des instruments de musique
$\{$flûte, guitare, piano$\}$.

L'ensemble de toutes les possibilités qu'un enfant joue de tel ou tel instrument est le produit cartésien des deux ensembles A et B.

$\{$(Michel, flûte), (Michel, guitare), (Michel, piano),
(Claire, flûte), (Claire, guitare), (Claire, piano),
(Josée, flûte), (Josée, guitare), (Josée, piano),
(Paul, flûte), (Paul, guitare), (Paul, piano)$\}$

On pourrait utiliser ce produit cartésien par l'un ou l'autre des diagrammes suivants

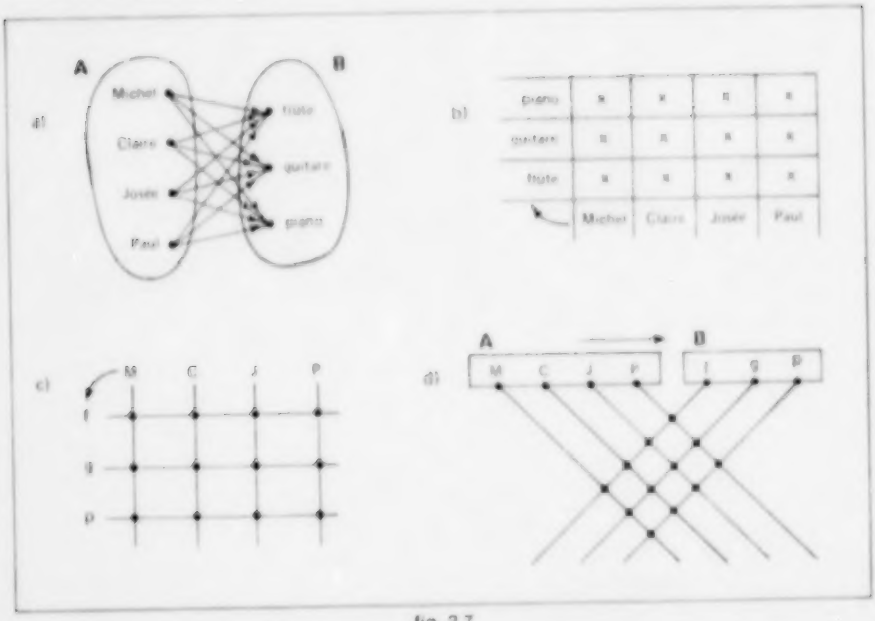


fig. 2.7

La recherche du produit cartésien de deux ensembles est une façon intéressante d'introduire la multiplication.

La lecture du fascicule C sur les nombres naturels permettra à l'enseignant d'approfondir cette suggestion.

Chapitre 3

Les fonctions et les opérateurs

En mathématique, les fonctions occupent une place prépondérante. Chaque fois qu'on veut se servir d'une formule géométrique, d'une règle de pourcentage, d'une loi de proportion, chaque fois qu'on veut faire le calcul d'un prix de revient, d'une moyenne, d'un partage, etc., on utilise des *fonctions*. Les simples opérations arithmétiques fondamentales sont également des *fonctions*. En résumé, on peut dire grossièrement qu'on a affaire à une *fonction* chaque fois que la résolution d'un problème n'apporte comme résultat qu'une seule et unique réponse. On voit assez bien, à l'analyse de cette énumération, l'importance et le rôle des *fonctions* dans l'application de la mathématique aux problèmes de la vie courante.

3.1 Fonctions et relations

Une fonction est avant tout un type particulier de relation.

Il ne semble pas nécessaire, ni même utile d'amener l'écolier à établir des distinctions entre ces deux notions. Il faudrait sans doute se limiter dans ce contexte à des activités sur les «machines à fonction».

3.2 Opérateurs et machines à fonction

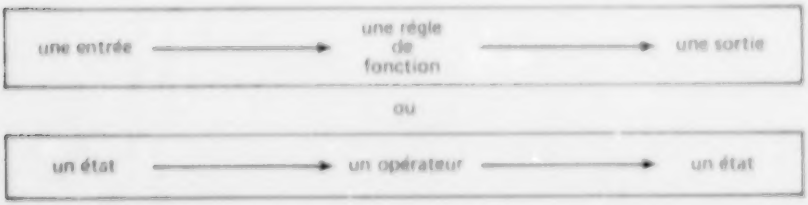
Par l'utilisation des machines à fonction, l'enfant s'initie à l'emploi des opérateurs. L'entrée de la machine peut être un objet pris dans la classe, une phrase ou un mot prononcé par l'enfant, la présence d'un objet ou d'un enfant en un endroit donné, un certain arrangement dans un ensemble d'objets, etc.

Une règle de fonction (ou opérateur) détermine la transformation à opérer et le résultat unique obtenu à la sortie témoigne de la modification apportée à l'état initial.

Exemples:

- Pour des objets, l'opérateur peut être: changer la forme, changer la couleur, changer la grandeur, l'ordre, etc.
- Pour des ensembles d'objets, l'opérateur peut être: autant que, un de plus, un de moins, etc.

Ce qui importe, c'est que l'écolier constate qu'à chaque fois qu'il utilise une «machine à fonction», il y a toujours:



Toutes ces expérimentations de machines agissant sur des objets, des actions, des mots ou des ensembles d'objets amèneront éventuellement l'écolier à s'intéresser à des règles de fonction agissant sur des nombres ou sur des figures géométriques par l'utilisation des opérations qu'il connaît. Ces règles de fonction sont aussi des opérateurs.

Chapitre 3

Les fonctions et les opérateurs

En mathématique, les fonctions occupent une place prépondérante. Chaque fois qu'on veut se servir d'une formule géométrique, d'une règle de pourcentage, d'une loi de proportion, chaque fois qu'on veut faire le calcul d'un prix de revient, d'une moyenne, d'un partage, etc., on utilise des *fonctions*. Les simples opérations arithmétiques fondamentales sont également des *fonctions*. En résumé, on peut dire grossièrement qu'on a affaire à une *fonction* chaque fois que la résolution d'un problème n'apporte comme résultat qu'une seule et unique réponse. On voit assez bien, à l'analyse de cette énumération, l'importance et le rôle des *fonctions* dans l'application de la mathématique aux problèmes de la vie courante.

3.1 Fonctions et relations

Une fonction est avant tout un type particulier de relation.

Il ne semble pas nécessaire, ni même utile d'amener l'écolier à établir des distinctions entre ces deux notions. Il faudrait sans doute se limiter dans ce contexte à des activités sur les «machines à fonction».

3.2 Opérateurs et machines à fonction

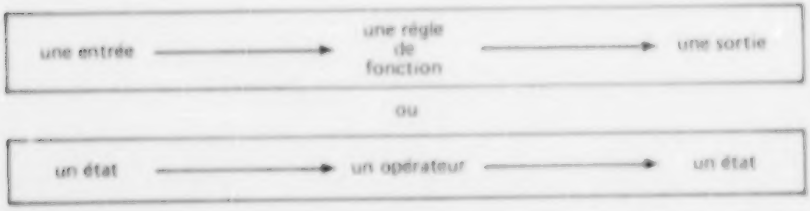
Par l'utilisation des machines à fonction, l'enfant s'initie à l'emploi des opérateurs. L'entrée de la machine peut être un objet pris dans la classe, une phrase ou un mot prononcé par l'enfant, la présence d'un objet ou d'un enfant en un endroit donné, un certain arrangement dans un ensemble d'objets, etc.

Une règle de fonction (ou opérateur) détermine la transformation à opérer et le résultat unique obtenu à la sortie témoigne de la modification apportée à l'état initial.

Exemples:

- Pour des objets, l'opérateur peut être: changer la forme, changer la couleur, changer la grandeur, l'ordre, etc.
- Pour des ensembles d'objets, l'opérateur peut être: autant que, un de plus, un de moins, etc.

Ce qui importe, c'est que l'écolier constate qu'à chaque fois qu'il utilise une «machine à fonction», il y a toujours:



Toutes ces expérimentations de machines agissant sur des objets, des actions, des mots ou des ensembles d'objets amèneront éventuellement l'écolier à s'intéresser à des règles de fonction agissant sur des nombres ou sur des figures géométriques par l'utilisation des opérations qu'il connaît. Ces règles de fonction sont aussi des opérateurs.

Exemple:

— Soit les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 et l'opérateur (+4), l'opérateur agit sur chacun des nombres choisis et le résultat est constitué de chaque nombre initial augmenté de 4 unités: 5, 6, 7, 8, 9

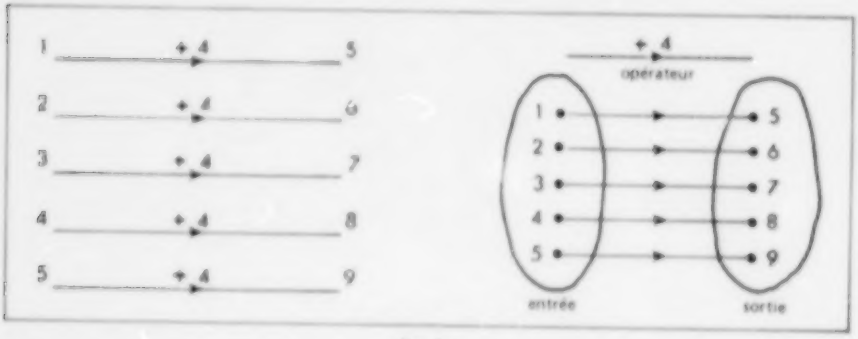


fig. 3.1

Après s'être intéressé à de tels opérateurs et aux ensembles de couples qu'ils engendrent, l'écolier veut découvrir ce qui peut bien se passer s'il utilise une succession d'opérateurs. Il aborde alors ce qu'il est convenu d'appeler les chaînes d'opérateurs (composition de fonctions).

3.3 Chaîne d'opérateurs ou composition de fonctions

Dans la vie courante, il existe plusieurs appareils ou machines capables d'exécuter toute une série d'opérations plus ou moins complexes: lave-vaisselle, tourne-disque, machine à laver, etc. L'enfant qui vit dans ce monde de l'automatisme, à l'ère des robots, prendra souvent un réel plaisir à vouloir remplacer plusieurs opérations successives par une seule. On pourra donc lui présenter diverses situations qui lui permettent de:

— changer l'ordre de deux ou même de plusieurs opérateurs;
— remplacer une suite d'opérateurs par un opérateur unique;
— changer un opérateur pour obtenir un résultat différent;
— chercher par quelle suite d'opérateurs on pourrait remplacer l'opérateur unique qui a donné tel ou tel résultat.

Ces différents exercices font largement appel aux manipulations, à l'utilisation de schémas, à des tableaux de données et à des représentations graphiques capables d'illustrer ces relations.

Peut-on modifier impunément l'ordre des opérateurs dans une chaîne de fonctions ou encore peut-on remplacer une suite d'opérateurs par un opérateur unique?

L'étude de quelques exemples pourrait sans doute jeter une certaine lumière sur cette question.

3.3.1 Inversion de l'ordre des opérateurs

Exemple 1:
Soit un ensemble de quatre figures géométriques qui ne diffèrent entre elles que par la forme ou la grandeur. Si les opérateurs sont: «changer la forme» ou «changer la grandeur», on constate que quel que soit l'ordre dans lequel ces opérateurs sont utilisés, le résultat est le même.

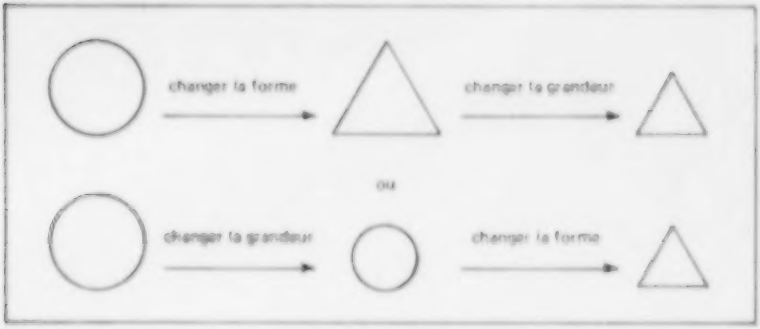
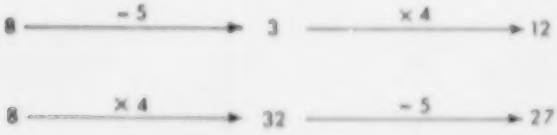


fig. 3.2

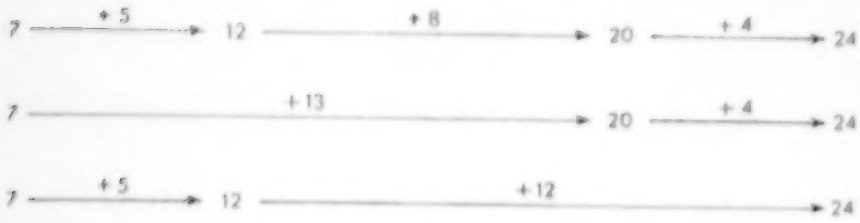
Exemple 2:
Si dans l'ensemble des nombres naturels, les opérateurs sont: (- 5) et (x 4), un changement de l'ordre dans lequel ces opérations agissent peuvent amener des résultats différents.



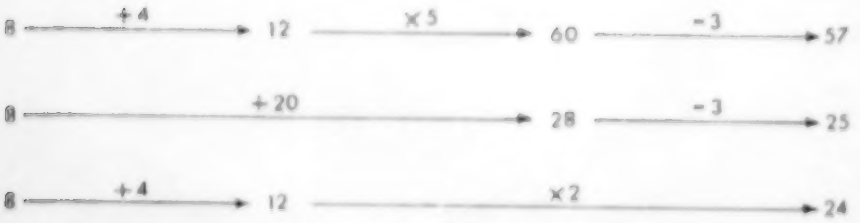
3.3.2 Chaine d'opérateurs remplacée par un opérateur unique

Il arrive parfois qu'on veuille remplacer une chaine d'opérateurs par un seul opérateur. De telles substitutions peuvent se faire, mais en prenant certaines précautions pour ne pas fausser les résultats.

Exemple 1:
Si pour l'ensemble des nombres naturels, le premier opérateur est (+ 5), le deuxième opérateur (+ 8), ces deux opérateurs peuvent être remplacés par l'opérateur (+ 13) et le résultat obtenu est le même. On a une situation semblable pour les deux derniers opérateurs: (+ 8) et (+ 4).



Exemple 2:
Si pour l'ensemble des nombres naturels, le premier opérateur est (+ 4), le deuxième opérateur (× 5) et le troisième opérateur (- 3), l'ordre dans lequel deux opérateurs sont remplacés par un seul peut changer le résultat final.



Lorsqu'on retrouve des opérations de soustraction ou de division dans une chaine d'opérateurs, on se trouve devant des difficultés que les écoliers sont loin de pouvoir résoudre facilement. La prudence est donc ici de rigueur.

Cette remarque étant faite, on pourra retrouver des suggestions intéressantes de chaines d'opérateurs dans les autres fascicules du *Guide pédagogique* et, en particulier, dans les fascicules C, E et F.

3.4 Transformations et invariants

Dans certains cas de fonctions ou de transformations, il peut être intéressant de rechercher quelles sont les caractéristiques d'un ensemble qui demeurent inchangées quand on les soumet à ces transformations. Dans le fascicule F du *Guide pédagogique* sur les activités géométriques, on trouvera plusieurs exemples d'activités qui illustrent cette notion d'invariants.

3.4.1 Transformations géométriques

La plupart des activités de manipulation à ce chapitre se font par déplacements d'objets. Que ces déplacements s'effectuent par glissement (translation), rabattement (symétrie) ou rotation, les objets ne peuvent subir ni déformations ni agrandissements (ou rétrécissements). Ces transformations laissent donc inchangées les dimensions et la forme de ces objets (invariants).

Si l'on se livre à d'autres types d'activités: dessins à échelle, projections lumineuses, étude des ombres, reproduction de dessins à l'aide de grilles variées, on pourra noter d'autres types d'invariants dont les plus importants sont le parallélisme, la forme et la proportion des figures*.

3.4.2 Transformations arithmétiques et propriétés des opérations

La recherche, la découverte et l'utilisation des propriétés des opérations peuvent contribuer à la formation de l'écolier en lui permettant de ne plus se contenter d'agir automatiquement, mais de réfléchir à ce qu'il fait. La connaissance de ces propriétés pourra de même favoriser chez l'enfant, le développement de ses habiletés en calcul et lui faciliter la découverte, la compréhension et l'assimilation de techniques relatives aux opérations et à la résolution de problèmes.

Même si la connaissance de ces propriétés est indispensable à une meilleure compréhension des opérations, elle ne doit pas être l'objet d'une étude systématique. Ainsi, il n'est vraiment pas nécessaire à l'écolier de connaître le nom de chaque propriété, il doit cependant être capable d'en faire un bon usage. Il doit connaître ces propriétés pour arriver à une certaine maîtrise des algorithmes et des techniques de calcul et surtout pour assurer une meilleure connaissance du rôle de la numération dans ces mêmes opérations.

Cette connaissance des propriétés des opérations doit être l'aboutissement d'une recherche progressive fondée sur de nombreux exemples où l'écolier après avoir expérimenté et observé, communique et applique ce qu'il a compris tout au long de son cheminement. Quelles que soient ces propriétés (commutativité, associativité, distributivité, élément neutre et élément absorbant), il doit en acquérir une connaissance pratique*.

Dans l'application de ces propriétés, l'enfant pourra toujours observer l'invariance des résultats obtenus dans des exercices variés.

$75 + 37 + 25 = 75 + 25 + 37 = 137$
$17 \times 5 = (10 \times 5) + (7 \times 5) = 85$
$45 \times 0 = 37 \times 0 = 0$
$96 - 21 = 100 - 25 = 75$
$(73 + 52) \rightarrow (75 + 50) \rightarrow 100 + 25 \rightarrow 125$
$3/4 \text{ de } 12 = (3 \times 12) \div 4 = (12 \div 4) \times 3 = 9$
$1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4$

3.4.3 Permutations

Les positions diverses que peuvent prendre, par exemple, trois jetons les uns par rapport aux autres peuvent donner lieu à un autre genre de transformations.

Soit la situation suivante:

* Voir le fascicule F du *Guide Pédagogique*, chapitre 5.

* Voir les fascicules C et E du *Guide pédagogique* sur les nombres naturels et les fractions.

Voici l'ensemble des possibilités que l'on peut obtenir en déplaçant les jetons.

Positions obtenues :

a)

b)

c)

d)

e)

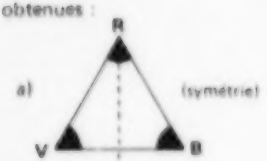
f)

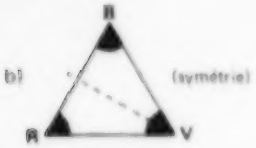
Il est facile de voir que la position f est exactement la même que la position de départ, qu'on a toujours le même nombre de jetons, que la forme, la couleur et la grandeur des jetons ne changent pas et qu'ils sont toujours placés sur une même ligne droite.

Il est intéressant de rapprocher cette activité de celle que l'on peut faire avec les symétries et rotations du triangle équilatéral.

Position de départ :

Positions obtenues :





Toutes ces transformations laissent invariantes certaines caractéristiques comme la position du triangle, ses dimensions et la couleur de ses coins.

Chapitre 4

Les opérations sur les ensembles

La formation, la description et la représentation d'ensembles permettent à l'écolier d'avoir une idée de la notion d'ensemble et des relations d'appartenance et d'inclusion. Or, on ne peut facilement dissocier cette démarche de celle des opérations sur les ensembles. Les activités de classification décrites au premier chapitre et, plus particulièrement, les classifications à plusieurs paliers illustrent assez bien cette situation. Les opérations relatives à la réunion d'ensembles, à l'intersection d'ensembles et au complément d'ensembles y sont présentées d'une façon au moins implicite.

Il ne s'agit pas ici de faire une étude systématique des opérations relatives à la réunion, à l'intersection et au complément d'ensembles, mais de pouvoir utiliser ces opérations pour former de nouveaux ensembles. En effet, il est plus important que l'écolier puisse décrire ce qui se passe lorsqu'il opère sur des ensembles que de connaître le symbolisme de ces opérations, leur terminologie ou leurs propriétés.

Par l'examen d'une situation donnée et à l'aide de diagrammes, l'écolier du primaire arrive facilement à opérer sur des ensembles. Il peut ainsi décrire tous les ensembles qu'il a formés à la suite de ces opérations.

4.1 Réunion d'ensembles

On peut demander à un élève de dire quels sont ceux qui jouent de la flûte ou de la guitare. À l'aide de manipulations ou de dessins, voici les diagrammes qu'il peut obtenir :

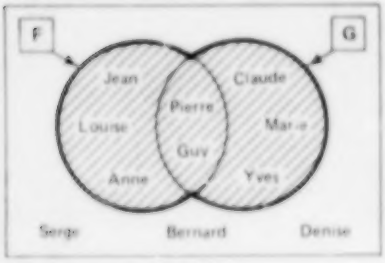


fig. 4.1

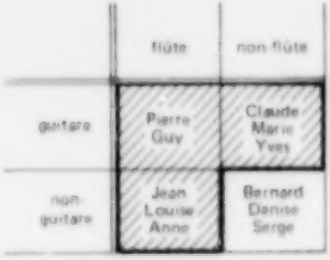


fig. 4.2

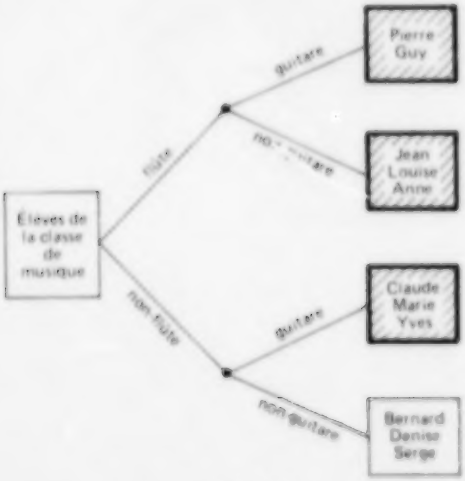


fig. 4.3

L'examen de l'un ou l'autre de ces diagrammes pourra amener l'écolier à déterminer l'ensemble recherché, c'est-à-dire la *réunion* dans un même ensemble de tous ceux qui jouent *ou bien* de la flûte *ou bien* de la guitare :

{Jean, Louise, Anne, Pierre, Guy, Claude, Marie, Yves}

La réunion d'ensembles disjoints constitue un des cas particuliers de la réunion d'ensembles qui peut servir dans l'apprentissage de l'addition des nombres naturels*.

* Voir le fascicule C du *Guide pédagogique*, chapitre 2.

4.2 Intersection d'ensembles

On peut encore demander à l'écolier de dire quels sont ceux qui jouent de deux instruments: guitare *et* flûte, par exemple. À l'aide de diagrammes obtenus de façon analogue à 4.1, il pourra trouver les écoliers qui appartiennent à l'ensemble recherché.

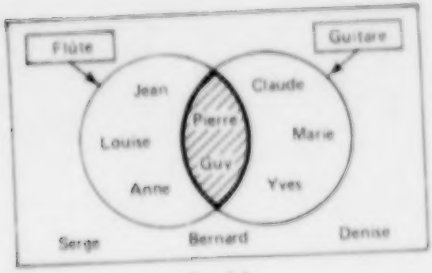


fig. 4.4

	flûte	non flûte
guitare	Pierre Guy	Claude Marie Yves
non guitare	Jean Louise Anne	Bernard Denise Serge

fig. 4.5

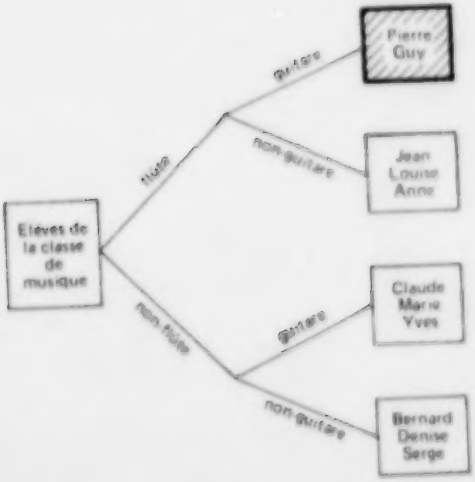


fig. 4.6

L'ensemble Pierre, Guy constitue l'ensemble des enfants qui jouent de la flûte et de la guitare. Il correspond à *l'intersection* de deux ensembles: l'ensemble de ceux qui jouent de la flûte et l'ensemble de ceux qui jouent de la guitare.

On se sert souvent de l'intersection d'ensembles pour élaborer des activités intéressantes dans la recherche de multiples ou de diviseurs communs à plusieurs nombres. Il en est de même lorsqu'on veut faire découvrir les caractéristiques communes à plusieurs figures géométriques*.

* On trouvera plus de détails à ce sujet dans les fascicules C et E du *Guide pédagogique*.

4.3 Complément d'un ensemble

Rechercher le complément d'un ensemble c'est en quelque sorte rechercher les éléments de cet ensemble qui n'ont pas une certaine propriété ou caractéristique donnée au préalable. Ainsi, dans l'exemple suivant, si l'ensemble F est constitué par les écoliers qui jouent de la flûte, le complément de cet ensemble sera constitué de ceux qui n'en jouent pas.

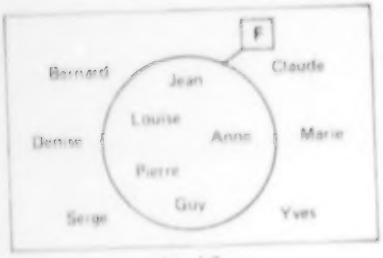


fig. 4.7

Le complément de l'ensemble F est constitué des écoliers qui ne jouent pas de la flûte:

{Bernard, Denise, Serge}
{Claude, Marie, Yves}

On aurait pu tout aussi bien illustrer cette situation à l'aide des diagrammes suivants:

ceux qui jouent de la flûte	ceux qui n'en jouent pas
Jean	Bernard
Louise	Denise
Anne	Serge
Pierre	Claude
Guy	Marie
	Yves

fig. 4.8

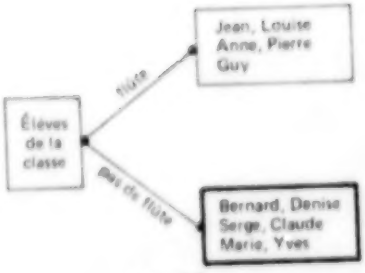


fig. 4.9

On verra sans peine les liens à établir ici entre cette opération et les activités de classification proposées au premier chapitre. Classifier, en effet, c'est déterminer si tel élément appartient ou non à un ensemble donné ou si cet élément possède ou non la caractéristique demandée.

L'opération «complément d'ensemble», qu'elle soit explicitée ou non, se retrouve donc à la base des actes de connaissance les plus fondamentaux.

- Cet objet représente un animal (ou non).
- Ce mot est un nom commun (ou non).
- Cet objet est un crayon (ou non).
- Cet objet glisse (ou ne glisse pas).
- Cet objet roule (ou ne roule pas).
- Ce nombre est pair (ou impair).
- Ce nombre est premier (ou composé).
- Ce nombre est un multiple de 5 (ou il ne l'est pas).

— Cette fraction est équivalente à 1/5 (ou non).
— Ce nombre est placé à la droite du zéro sur la droite numérique (ou non).
— Etc

Cette opération sur les ensembles sert également à illustrer de façon imagée l'opération de soustraction*.

Si l'on se réfère à l'exemple présenté en 4.1 et 4.2 et qu'on veuille répondre aux questions suivantes

— Quels sont les élèves qui jouent de la flûte et ne jouent pas de la guitare?
— Quels sont les élèves qui ne jouent ni de la flûte ni de la guitare?
— Quels sont les élèves qui jouent de la guitare, mais ne jouent pas de la flûte?

on se rend compte qu'on ne peut le faire sans utiliser d'une manière ou d'une autre l'opération «complément d'un ensemble».

* Voir le fascicule C du Guide pédagogique, chapitre 3.

Chapitre 5

L'étude de structures

5.1 Remarques préliminaires

Dans ses activités avec des ensembles, des relations, des fonctions et des opérations, l'écolier découvre et reconnaît certaines «régularités». Il peut aussi découvrir certains éléments de structures à l'intérieur d'ensembles d'objets ou d'ensembles de nombres.

Même si les éléments d'un ensemble sont connus, cet ensemble n'est en quelque sorte qu'un ensemble amorphe si l'on ne dit rien des liens qui peuvent relier ces éléments entre eux. En identifiant une relation ou en définissant une loi de composition dans un ensemble, l'écolier donne une certaine forme à cet ensemble, c'est-à-dire qu'il donne une structure à cet ensemble. En effet quand, dans un ensemble, on définit une ou plusieurs opérations ayant des propriétés bien déterminées, on donne une structure à cet ensemble.

Ici encore, les termes «régularités» et «structures» ne doivent pas faire l'objet d'apprentissage comme tels. Ce qui importe, c'est de favoriser l'exploitation de situations qui permettent à l'écolier de découvrir certaines structures simples comme l'addition ou la multiplication des nombres pairs ou impairs. L'exploitation de telles situations pourra le préparer à l'exploration de structures plus complexes tout au long de son évolution mathématique.

5.2 Domaine du non numérique

5.2.1 Régularités

Les premières activités de recherche sur des «régularités» se feront à partir des sériations, des classifications et des relations que l'écolier pourra établir entre les éléments d'un ensemble ou même entre des ensembles.

Exemple:
L'écolier découvre la règle du jeu et continue la série.

Il pourra même organiser des séquences d'événements ou d'opérations de telle sorte qu'on puisse retrouver un lien logique dans ces séquences.

Exemple:
L'écolier place en ordre une série d'images pour retrouver la chronologie d'une histoire.

5.2.2 Structures simples

Dès le début du premier cycle, l'écolier est capable de découvrir et même de créer plusieurs structures simples à partir de jeux qui, à première vue, n'ont rien de mathématique.

Les jeux auxquels les écoliers se livrent, au moment de récréations ou d'activités libres, présentent d'excellentes situations à exploiter, au niveau primaire.

Parmi ces situations, on retrouve:

- le jeu des quatre coins;
- la marelle;
- le ballon-chasseur;
- le drapeau;
- le jeu d'«échelles et glissades»;
- le jeu de la comptine: «Am stram gram ...»;
- le jeu de la chanson: «Trois fois passera ...»;
- Etc.

Exemple:
Dans certains jeux, il faut qu'un des participants soit désigné au sort. Le plus souvent, les écoliers récitent une comptine ou chantent une chanson. La dernière syllabe désigne alors, selon la convention du jeu, celui qui est éliminé ou celui qui

est choisi. Au bout d'un certain temps, les enfants découvrent certaines règles qui leur permettent de choisir qui ils veulent ce qui, d'une certaine façon, constitue une forme d'activité mathématique.

5.3 Domaine du numérique

5.3.1 Régularités

Les activités mathématiques présentent une multitude de situations à exploiter qui permettent à l'écolier de découvrir ou de créer certaines «régularités» avec des suites de nombres ou des suites d'opérations sur les nombres.

Parmi les situations à exploiter, on trouve:

- la recherche de la complémentarité dans l'addition des nombres naturels;
- l'utilisation de la compensation pour l'addition et la multiplication des nombres;
- les jeux de carrés magiques ou d'étoiles magiques;
- des activités sur les nombres triangulaires, carrés ou rectangulaires;
- l'étude des nombres pairs et impairs;
- des activités de recherches sur les nombres palindromes;
- la découverte ou la création de suites de nombres ou de suites d'opérations;
- etc.

Exemple 1:
L'élaboration de suites de nombres permet à l'écolier de découvrir ou de créer la loi qui régit chaque suite. Une des suites particulièrement intéressante à étudier est sans doute celle de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Pour continuer cette suite, l'enfant doit découvrir la règle qui la régit: chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent.

Exemple 2:
Suites d'opérations:

a)		b)	
7 + 6 =	13	7 - 5 =	2
17 + 6 =	—	6 - 5 =	1
27 + 6 =	—	5 - 5 =	0
37 + 6 =	—	4 - 5 =	?

5.3.2 Structures simples

Les activités mathématiques dont il est question dans ce chapitre contribuent de façon particulière à former la pensée logique de l'écolier en le rendant capable de découvrir les éléments de structures qui peuvent exister dans une mathématique à sa portée.

Parmi les *structures simples* que l'écolier est capable de découvrir ou de créer, on trouve:

- la recherche des propriétés de l'addition et de la multiplication pour l'ensemble des nombres naturels;
- l'exploration des propriétés des opérations d'addition et de multiplication pour les ensembles de nombres pairs et impairs;
- l'exploration des propriétés de l'opération de multiplication pour l'ensemble des fractions;
- l'exploration d'une arithmétique modulaire basée sur l'heure;
- la recherche du nombre de permutations possibles pour 2, 3 ou 4 objets;
- l'exploration de l'ensemble des rotations et des symétries du carré;
- l'exploration de l'ensemble des rotations et des symétries du triangle équilatéral;
- etc.

Exemple:

Dans les ensembles de nombres pairs et impairs, la règle de composition «additionner» permet à l'enfant de découvrir certains éléments de structure.

+	0	1	2	3	...
0	0	1	2	3	
1	1	2	3	4	
2	2	3	4	5	
...					

Il lui est alors facile de découvrir:

- que la somme de deux nombres pairs ou la somme de deux nombres impairs donne toujours un nombre pair;
- que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

— que l'élément neutre de l'addition est toujours «zéro», pour toute combinaison de nombres pairs ou impairs.

Il est fort probable que ses découvertes n'iront pas beaucoup plus loin, mais il n'est pas impossible qu'il aille jusqu'à s'interroger sur la commutativité et l'associativité de cette opération dans les ensembles en cause.

Chapitre 6

Les concepts unificateurs et les programmes de l'enseignement primaire

Au primaire, la mathématique ne vise pas uniquement la maîtrise des opérations sur les nombres et l'apprentissage des principales formes géométriques, même si ces apprentissages semblent occuper une place prépondérante à l'intérieur du programme. Ces notions de mathématiques ne constituent en effet qu'une espèce de «grammaire» mathématique grâce à laquelle une véritable pensée mathématique doit pouvoir naître et se développer en termes de relations à établir, de transformations à effectuer et de classifications à opérer.

Or, s'il est vrai qu'aux niveaux d'enseignement plus élevés (secondaire, etc.) le champ d'application ou d'utilisation de ces concepts se limite presque exclusivement au domaine des mathématiques, il n'en demeure pas moins, qu'au primaire, ces mêmes éléments de classification, de relations et de transformations devront s'articuler à l'intérieur des domaines d'intérêts et d'apprentissages des élèves. D'ailleurs, ces mêmes démarches se trouvent étroitement reliées à l'activité logique de l'écolier et se retrouvent à des degrés divers dans tous ses apprentissages.

6.1 Concepts unificateurs et mathématique

Qu'il s'agisse de nombres, d'un système de numération, d'une opération, de fractions, de mesures, de comparaisons entre des nombres ou des figures, d'ensembles de diviseurs ou de multiple de dénominateurs communs, etc., les concepts unificateurs peuvent jouer et jouent toujours, au moins de façon implicite, un rôle de premier plan dans l'acquisition, l'utilisation ou la représentation d'une notion mathématique.

Les enseignants auraient donc avantage à lire et à consulter les autres fascicules du *Guide pédagogique* afin d'y découvrir les nombreuses applications intéressantes qu'on y fait des concepts unificateurs et qu'il serait bien inutile de reproduire ici.

6.2 Concepts unificateurs et apprentissage des autres disciplines

Toutes les disciplines soumises à l'apprentissage de l'enfant contribuent sous des aspects divers et souvent convergents à sa formation intégrale. Elles font toutes appel au développement de sa pensée logique et de son esprit de créativité, même si elles le font sous des angles différents.

Ainsi l'élaboration de structures ne se fait pas qu'en mathématique. C'est pourquoi les autres disciplines pourraient sans doute tirer avantage de l'utilisation des instruments élaborés en mathématique pour l'apprentissage des structures qui leur sont propres.

Exemple:

1. Quand, en arts plastiques, l'élaboration d'une oeuvre commune sur un thème donné amène l'écolier à établir les relations

   est à côté de
   est au-dessus de
   est en dessous de
   est plus grand que
   est plus petit que
   etc.

   Les éléments de repérage dans le plan que ces activités supposent relèvent-elles uniquement du domaine des arts plastiques?

2. Quand, en éveil musical, la reconnaissance et la reproduction des sons selon la durée, l'intensité ou la hauteur amènent l'enfant à des sériations comme celles-ci:

   — du plus doux au plus fort
   — du plus grave au plus aigu
   — du plus court au plus long
   — etc.

   peut-on dire que ces activités soient strictement du domaine de la musique?

3. Quand, en sciences de la nature, on dresse un tableau des données obtenues relativement à la croissance d'une plante, est-ce que cette démarche appartient exclusivement au domaine des sciences de la nature?

4. Quand, enfin, dans l'apprentissage de la langue maternelle, on veut clas-

ser des lettres en voyelles et en consonnes, des mots en noms, adjectifs ou verbes, quand on veut établir des relations entre synonymes, homonymes ou antonymes ou rechercher des mots d'une même aire sémantique, est-ce que les processus d'apprentissage utilisés dans ces démarches tiennent d'une logique qui n'appartient qu'à l'apprentissage d'une langue?

Il semble assez évident que l'utilisation des concepts unificateurs et des types de diagrammes qui s'y rattachent pourrait contribuer à simplifier l'expression de la pensée logique de l'enfant en lui fournissant des outils faciles à manipuler quand il se livre à des apprentissages dans des secteurs autres que celui des mathématiques.

CONCLUSION

Les concepts unificateurs qui sont le fondement d'une certaine forme de représentation et de généralisation des notions mathématiques, *sont et doivent rester des moyens d'expression au service d'une pédagogie qui permet l'exploration, l'abstraction et l'utilisation progressives de ces concepts.*

Cette approche mathématique permet à l'enfant d'acquérir une pensée plus ferme et un mode d'expression plus précis qu'il développera tout au long de son cheminement scolaire.

L'utilisation adéquate des notions et des démarches qui se retrouvent dans les concepts unificateurs, conduit l'enfant non seulement à un savoir plus sûr, mais à la recherche, à la découverte et à la création de situations nouvelles.

Il ne faut pas réduire cet apprentissage mathématique à la seule maîtrise d'une terminologie ou d'un symbolisme. Il ne faut jamais perdre de vue que l'important n'est pas la connaissance du terme ou du symbole, mais bien ce que représente ce terme ou ce symbole.

Il faut donc voir sous le thème «concepts unificateurs» non pas tant un contenu à enseigner que des moyens d'expression et des outils de la pensée que l'écolier met au point progressivement et qu'il s'habitue à utiliser dans les situations les plus variées.

Il ne faut surtout pas penser avoir épuisé le sujet, à la suite d'une série d'activités réalisées dans un temps donné. Le développement de la pensée et du raisonnement logique de l'enfant demande une exploitation progressive et continue de toutes ces notions en cours d'année.

Le présent fascicule tient compte des intentions pédagogiques du programme *en insistant sur l'utilisation des concepts unificateurs comme moyens d'expression et comme outils de la pensée pour favoriser l'étude, l'unification et l'intégration des apprentissages mathématiques au primaire.*